ANDREU MAS COLELL
Universidad de California, Berkeley

Algunas observaciones sobre la teoría del tâtonnement de Walras en economías productivas (*)

I. INTRODUCCION

En el sistema teórico de L. Walras (1) la explicación del sistema de precios que rige en una economía competitiva aparece como la solución de un sistema de ecuaciones simultáneas; él mismo recoge múltiples interacciones presentes en la economía y puede, por tanto, consistir de un número muy elevado de ecuaciones.

Para afianzar el valor explicativo de su teoría, Walras argumenta que el mercado computa naturalmente, y de forma descentralizada, los precios de equilibrio; la tendencia de los precios a aumentar (o disminuir) si la demanda es superior (o inferior) a la oferta y la tendencia de la producción a aumentar (o disminuir) si los beneficios son positivos (o negativos) serían fuerzas lo bastante poderosas como para garantizar la obtención de precios (y producciones) de equilibrio. Este es el contenido de la famosa teoría del *tâtonnement.* Un buen índice de su impacto sobre el pensamiento económico en cuanto teoría de la *determinación práctica* de los precios de equilibrio es que fuese seriamente propuesto (por F, Taylor, O. Lange y otros, véase [17] como solución al "problema" del cálculo económico en una economía socialista.

Una interpretación menos ambiciosa (pero ciertamente no la de Walras) del *tâtonnement* es posible. El énfasis no se pondría tanto en la computación efectiva de equilibrios como en la estabilidad interna de los

(*) Deseo expresar mi agradecimiento a Carlos Sebastián por la ayuda prestada en la confección de este artículo.

(1) Todas las citas o referencias de este artículo serán a la cuarta edición (definitiva) de los *Elements d'Economie Politique Pure* (32). Por supuesto para una lectura concienzuda de Walras es imprescindible consultar la edición-traducción de W. Jaffé *Elements of Pure Economics* (33).

mismos. Es decir, no estaríamos tan interesados en saber cómo se llega a un equilibrio, cómo en asegurar que una vez se alcance uno, éste no será muy sensible a pequeñas perturbaciones del sistema. La interpretación del párrafo anterior da origen a un problema de *estabilidad global,* la de éste a uno de *estabilidad local.*

A pesar de sus esfuerzos, Walras no demostró formalmente que el *tâtonnement,* entendido como mecanismo teórico, funcionase (local o globalmente) (2) ni es sorprendente que no lo hiciera. Este es un problema, en su esencia, matemático y cuando Walras escribió su obra aún no habían nacido las investigaciones fundamentales sobre sistemas dinámicos de Lyapunov y Poincaré.

P. Samuelson (en 1944, véase [26]) fue el primero que planteó explícitamente el *tâtonnement* como un sistema de ecuaciones diferenciales y que para su análisis apeló a la teoría matemática de los sistemas dinámicos.

En los *Eléments,* Walras construye su teoría del equilibrio general por aproximaciones sucesivas, presenta primero una teoría del "intercambio de dos mercancías" a la que siguen sucesivamente, la "teoría del intercambio de varias mercancías", "teoría de la producción", "teoría de la capitalización y el crédito" y "teoría de la circulación del dinero". Sobre las dos últimas no tendremos nada que decir en este artículo.

En los últimos veinte años, y utilizando el instrumental matemático sugerido por Samuelson, un gran número de investigaciones se han dedicado al análisis del *tâtonnement* en economías de intercambio puro (es decir, en el primer y segundo modelo de Walras). Como resultado de las mismas hoy parece que (excepto por lo que respecta al modelo con dos mercancías) Walras pecó de optimismo. La teoría del *tâtonnement* es satisfactoria, o lo que es lo mismo el *tâtonnement* funciona, sólo bajo condecisiones muy limitadas.

El problema económico de una economía de intercambio puro es el de la redistribución entre los consumidores de las existencias iniciales de mercancías. En todos las formulaciones existentes el *tâtonnement* queda completamente determinado por la forma de la función de exceso de demanda, es decir, por la función que asocia a cada sistema de precios las

(2) Walras era consciente de ello. Sus enunciados *formales* (por ejemplo, páginas 64, 133, 230 de los *Eléments*) son del tipo: para que haya equilibrio "il faut et il suffit" que la oferta sea igual a la demanda, si no hay equilibrio "il faut" para alcanzarlo subir (o bajar) los precios en exceso de demanda (o de oferta). Es difícil no interpretar la ausencia de "et il suffit" en este último punto como un reconocimiento de la insuficiencia de la demostración.

demandas netas agregadas (cantidades negativas son ofertas). Ahora bien, H. Sonnenschein [30], R. Mantel [20] y G. Debreu [7] han demostrado recientemente que las restricciones impuestas por la hipótesis de maximización de utilidad de los consumidores sobre las funciones de exceso de demanda son prácticamente nulas. En otras palabras, un teorema que afirmase la universalidad del funcionamiento del *tâtonnement* sería prácticamente equivalente a afirmar que dado cualquier campo de vectores en un espacio euclídeo (de más de dos dimensiones) las trayectorias que se determinan convergen siempre a puntos estacionarios, una afirmación tan audaz como patentemente falsa.

Sempre en el marco de economías de puro intercambio, las investigaciones primeras de Arrow y Hurwicz [5] y de Arrow, Block y Hurwicz [2] (3) identificaron algunas clases de funciones de exceso de demanda para las que el *tâtonnement* funciona. El resultado sobre el que queremos centrar nuestra atención es: si la función (agregada) de exceso de demanda satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada de Samuelson (y alguna otra condición de regularidad) entonces la economía tiene un equilibrio único y éste es efectivamente computado por el *tâtonnement*. El Axioma Débil (AD de ahora en adelante) se cumple, por ejemplo, si la función de exceso de demanda *(agregada)* se computa como si la sociedad estuviese maximizando una función de utilidad; ésta es una condición muy restrictiva pero en la medida que existe una teoría de la agregación y que los casos en que la condición se cumple están bien entendidos, la teoría basada en el AD merece, sin duda, una exploración en profundidad (4).

El objetivo del presente trabajo será examinar el funcionamiento del *tâtonnement* de Walras en su tercer modelo; es decir, en sus economías productivas. En contraste con lo que ocurre respecto a los modelos de puro intercambio, la literatura sobre el particular es más bien escasa (re-

---

(3) Buenos "surveys" son T. Negishi (23) y los capítulos 11 y 12 de K. Arrow y F. Hahn (3).

(4) La otra gran clase de funciones de exceso de demanda para las que el *tâtonnement funciona* son las que satisfacen las condiciones de "*sustitutibilidad bruta*" (*gross substitutes*). En este artículo no estamos interesados en esta condición por dos razones: (i) con la excepción del caso de dos mercancías, todas las condiciones de estabilidad (local o global) aisladas hasta la fecha, garantizan que el equilibrio es único, lo que sugiere que si se quiere discutir estabilidad, mejor será tener unicidad desde el principio. Ahora bien, en una economía productiva, y ellas serán objeto de estudio en el presente artículo, la única hipótesis sobre el exceso de demanda de los consumidores para la que, con toda generalidad, se obtiene unicidad es el AD.

(ii) es un problema abierto, determinar si la condición de *sustitutibilidad bruta* es independiente de la del AD o, simplemente, un caso particular de la misma.

ferencias directas son M. Morishima [22], K. Arrow y F. Hahn [3] (12-10), e indirectas, K. Arrow y L. Hurwicz [4], E. Malinvand [19]). Ello se explica por la creencia bastante extendida de que los problemas con producción son reducibles en última instancia a los de puro intercambio. lo que es verdad sólo hasta cierto punto; así, por ejemplo, el análisis del intercambio puro no permite en absoluto abordar el problema de los rendimientos constantes a escala; cualquier teoría cuyo objeto son funciones de demanda y oferta los elimina por hipótesis. La teoría del *tâtonnement* en economías produtivas presentada por Walras es *cualitativamente* distinta a la del intercambio puro, mientras en éstas la teoría se basa únicamente en el principio ("Loi de l'offre et la demanda"): si la demanda es superior a la oferta el precio sube (y recíprocamente), en aquellas se le añade un segundo principio ("Loi de prix de revient"): si el precio es superior al coste, la producción aumenta.

Se supondrá (las hipótesis sobre la tecnología son las de Walras) que la economía viene dada por dos sectores, producción y consumo. El sector producción dispone de técnicas (con rendimientos constantes a escala y coeficientes fijos) que permiten transformar factores (mercancías originales no producibles) en productos. El sector consumo posee factores y desea productos, vendrá especificado por una función de demanda neta. Es evidente que no hay esperanza alguna de que el *tâtonnement* funcione mejor en este contexto que en el del intercambio puro. En consecuencia, se postula desde el principio que la función de demanda del sector consumo satisface el Axioma Débil. El modelo será descrito con detalle en la Parte II.

Los objetivos perseguidos son, pues, limitados: *investigar hasta qué punto en una economía productiva de las características descritas la hipótesis de que la función de exceso de demanda de los consumidores satisface el AD basta para garantizar que los (dos) principios del tâtonnement "determinan" (en el sentido local o global) el equilibrio.*

Nuestros resultados y conclusiones no serán muy positivas. En la Parte III se verá que una primera formulación natural del *tâtonnement* no obtiene estabilidad del equilibrio ni local ni globalmente. Tras una ligera (pero un tanto artificial) reformulación se conseguirá estabilidad local pero no global. Se observará además que el *tâtonnement* en economías productivas tiene una tendencia intrínseca a originar trayectorias cíclicas (aunque posiblemente convergentes) (5).

---

(5) Esta observación, por supuesto, no es nueva. Es bien sabido que los métodos de "gradiente" aplicados a funciones cóncavo-convexas o la resolución de un juego por el método de "juego ficticio" originan trayectorias espirales de con-

En la Parte IV se conseguirá estabilidad global pero sólo a costa de limitar el campo de aplicación del *tâtonnement* a los mercados de factores y de combinarlo con otro mecanismo para los mercados de productos y el comportamiento de las empresas que, aunque interpretable de una forma descentralizada, es *esencialmente distinto* al *tâtonnement.* Este procedimiento que, en definitiva, es el más satisfactorio, es análogo al propuesto por F. M. Taylor [31] en el contexto de la polémica sobre el cálculo económico en economías socialistas. Quisiéramos observar, de pasada, que el contenido de los resultados que se obtendrán más adelante es muy afín a los de la literatura sobre procedimientos descentralizados de planificación, sin embargo, y punesto que estamos discutiendo la teoría de Walras, pondremos el énfasis en la interpretación en términos de economías de propiedad privada.

Como balance podríamos decir que el análisis del presente artículo subraya una vez más las limitaciones de la teoría del *tâtonnement.* En contraste con su teoría del equilibrio estático que es muy profunda y ha dado origen a una teoría rigurosa y fructífera (el modelo "Arrow-Debreu") parece claro que la teoría de *la determinación del equilibrio* de Walras no ha resultado tan favorecida; es estéticamente muy atractiva pero, en última instancia, más bien ingenua. Las repercusiones de sus insuficiencias se hacen sentir en muchas direcciones. Señalaremos, para concluir, tres de ellas:

(i) Puesto que las ideas que sustentan el *tâtonnement* no dan cuenta (ni analógicamente) de las razones por las que una economía se mantendría en equilibrio, el estudio del *desequilibrio* cobra nueva importancia. Arrow [1] ha observado sagazmente que las situaciones de desequilibrio son esencialmente no competitivas y que, por lo tanto, su análisis debe basarse en alguna variedad de la teoría de la competencia monopolística. En contraste con Cournot, Walras quiso fundamentar (6) su teoría del equilibrio en la hipótesis de competencia perfecta; paradójicamente, el callejón sin salida al que conduce la teoría del *tâtonnement* debe dar renovados impulsos al análisis del monopolio.

(ii) La estabilidad local de los equilibrios ha sido concebida tradicionalmente como una precondición del *análisis estático-comparativo* (ello es muy claro en J. Hicks [14]: si a comparar equilibrios se atribuye algún significado, entonces tiene que ser el caso que si un parámetro varía (y por tanto la economía ya no está en equilibrio) la economía tenderá automáticamente a alcanzar su nueva posición de equilibrio. Parece,

---

vergencia muy lenta. La esencia del fenómeno, en nuestro caso, es exactamente la misma.

(6) Véase la Sección VIII de los *Elements.*

pues, que la posibilidad de la estática comparativa depende de un axioma postulando la estabilidad (local) de los equilibrios. Ahora bien, si por estabilidad se entiende la definida en relación con el *tâtonnement* se ha visto que implica restricciones muy fuertes y no muy razonables (7). ¿Qué hacer? En tanto no se disponga de una teoría del equilibrio bien desarrollada, una vía de escape consistente en trabajar con un axioma implícito (un "axioma fuerte" de estabilidad) afirmando que si las economías están en equilibrio entonces se mantienen en él, con tal que las variaciones del mismo debido a perturbaciones en los parámetros no sean muy abruptas. Tal hipótesis parece abrir un amplio campo de investigación sobre los fundamentos de la estática comparativa (8).

(iii) Las reglas de cálculo económico a que una economía socialista (descentralizada o no) deberá recurirr, serán, más que las implícitas en la teoría del *tâtonnement,* las procedentes de la teoría de la programación matemática e incluso de métodos algorítmicos más generales (véase H. Scarf [28].

II. DESCRIPCION DEL MODELO

Trataremos un modelo con $n+m+1$ mercancías, n de ellas son producibles y se denominan *productos,* las $m+1$ restantes no son producibles y se denominan *factores*. El factor $(m+1)$-ésimo jugará el papel de *numerario,* es decir, su precio es fijo e igual a 1 y, por convención, los precios de las demás mercancías deben entenderse como relativas al numerario.

El símbolo p se reserva para denotar un vector (columna) de precios de los productos; análogamente, q denotará un vector de precios de los m factores que no son el numerario. Un sistema de precios será, entonces, $s'=(p', q')=(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m)$ (9). Los precios son siempre números no negativos.

En las próximas dos secciones se describirán, sucesivamente, las hipótesis concernientes a las empresas (sector producción) y a los consumido-

---

(7) Pero, por otra parte, no proporcionan, en general, información útil bajo la forma, por ejemplo, de teoremas muy precisos sobre cómo varían los equilibrios con los parámetros que definen la economía. La idea de derivar resultados estático-comparativos de un axioma de estabilidad es el contenido del "principio de correspondencia" de Samuelson (véase [27], especialmente de la parte II); los resultados alcanzados han sido muy escasos.

(8) Estamos pensando en las ideas y la literatura originadas por el artículo de G. Debreu [6].

(9) En este artículo se entenderá que los vectores son siempre columnas; y' denotará el vector fila transpuesto de y.

res (sector consumo). En la sección 3 se definirá el equilibrio walrasiano y en la 4 se recogerán algunas definiciones y resultados técnicos sobre sistemas dinámicos.

1. PRODUCCIÓN.

Siguiendo a Walras (10) se supondrá que las posibilidades tecnológicas de la economía se caracterizan por la *ausencia de producción conjunta* (es decir, cada empresa puede producir a lo sumo un producto), por la presencia de *rendimientos constantes a escala* (cualquier nivel de producción no negativo es posible) y por la existencia de *coeficientes fijos de producción* (la cantidad de una mercancía necesaria para la producción de una unidad de otra mercancía es una constante independiente de los precios). Esta tercera hipótesis se impone tan sólo por simplicidad; *todo el análisis y los resultados de este artículo pueden generalizarse sin dificultad alguna al caso en que existan posibilidades de sustitución entre los factores.*

Para cada producto i, $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$ serán los coeficientes de utilización de productos y $(b_{1i}, \dots, b_{mi})$ los coeficientes de utilización de factores, es decir, a_{hi} (ó b_{hi}) es la cantidad del producto $1 \leqslant h \leqslant n$ (o del factor $1 \leqslant h \leqslant m$) necesario para la producción de una unidad del producto i. Por convención, $a_{ii}=0$ para todo i.

Fórmense las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11}, \dots, b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{m1}, \dots, b_{mn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_{m+1,1} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ b_{m+1,n} \end{bmatrix}$$

El nivel (o la escala) de actividad del proceso productivo i se denotará x_i y, puesto que ambas magnitudes son idénticas, se identificará sin más con la producción total de la mercancía i.

Sea $x'=(x_1, \dots, x_n)$ un vector de producciones totales, entonces el vector de disponibilidades netas de productos para el consumo final es

---

(10) El modelo de esta sección es una versión de las economías productivas estudiadas en la Sección IV (lecciones 17 a 22, inclusive) de los *Eléments*. La formalización debe mucho a la teoría del *input-output* de Leontief. Para presentaciones expositorias del mismo véanse, por orden de dificultad, R. Dorfman, P. Samuelson y R. Solow [8], capítulos 9 y 10); D. Gale ([9], capítulo 9), H. Nikaido ([24], capítulo 2).

$[I-A]x$ (donde I es la matriz idéntica) y el vector de las cantidades totales de factores requeridos para la producción de x es

$$\begin{pmatrix} B & x \\ b' & x \end{pmatrix}$$

Supondremos:

Hipótesis 1: (i) *para cada* i, a_{hi}, $b_{hi} \geqslant 0$ *para todo* $1 \leqslant h \leqslant n$, $1 \leqslant h \leqslant m+1$; (ii) *para cada* i, $b_{hi} > 0$ *para algún* $1 \leqslant h \leqslant m+1$; (iii) *para algún* $x \geqslant 0$, $[I-A]\ x \geqslant 0$ (11).

La anterior es una hipótesis familiar en la teoría de las matrices *input-output* de Leontief (11) y tiene una interpretación económica obvia: (*i*) significa que los coeficientes de utilización no son números negativos; (*ii*) significa que para producir una unidad de producto se necesita una cantidad positiva de algún factor; (*iii*) significa que el sistema es *productivo*, es decir, los procesos productivos pueden operarse a niveles (no negativos) tales que, como resultado neto de la producción se obtienen cantidades positivas de productos disponibles para el consumo final (12).

Dado un sistema de precios s el coste de producción de una unidad del producto i es

$$\sum_{h=1}^{n} a_{hi}\, p_h + \sum_{h=1}^{m} b_{hi}\, q_h + b_{m+1,i}$$

En notación matricial, el vector de costes unitarios de los productos es:

$$A'p + B'q + b$$

o lo que es lo mismo (13)

$$[A', B']s + b$$

y, por lo tanto, el vector de beneficios por unidad producida de los productos es:

$$[I-A']p + B'q + b$$

o lo que es lo mismo

$$[I-A', B']s + b.$$

---

(11) Si y y z son vectores con l componentes, $y \gg z$ significa que $y_i > z_i$ para todo $1 \geqslant i \geqslant l$; $y > z$ significa que $y_i \geqslant z_i$ para todo i, pero $y \neq z$; $y \geqslant z$ significa que o bien $y = z$ o bien $y > z$. El símbolo 0 denota indistintamente el número cero o el vector $(0, \ldots, 0)$.

(12) Véanse las referencias de la nota 10.

(13) Si E es una matriz, E' es su matriz transpuesta.

Finalizando esta sección con un enunciado técnico que se necesitará más adelante.

Bajo la hipótesis 1, todos los valores característicos de la matriz A−I *tienen parte real negativa; en particular,* A−I no es singular (14) (15) [1].

2. Consumo.

Supondremos que los consumidores demandan productos y ofrecen factores. Por convención, las ofertas serán números negativos y las demandas números positivos. Dado un vector de precios s y vectores de demandas $z=(z_1, \dots, z_n)'$ y ofertas $y=(y_1, \dots, y_m)'$, y_{m+1} la *renta neta* será $s'(z, y)+y_{m+1}=p'z+q'y+y_{m+1}$. Esta cantidad puede ser positiva o negativa y mide la diferencia entre la renta obtenida por la venta de factores $(-q'y-y_{m+1})$ y el coste de la demanda.

Postularemos, por hipótesis, que el comportamiento de los consumidores en los mercados de productos y factores puede resumirse en una *función de exceso de demanda.*

$$f(s, r)=\begin{pmatrix} f^1(s, r) \\ f^2(s, r) \end{pmatrix}$$

que asocia a cada sistema de precios $s \gg 0$ y a cada renta neta $-\infty < r < \infty$ un vector de demanda $f^1(s, r)=(f_1^1(s, r), \dots, f_n^1(s, r))'$ de los productos y un vector de ofertas $f^2(s, f)=(f_1^2(s, r), \dots), f^2(s, r)'$ de las factores no numerarios. La oferta del factor numerario vendrá dada por $r-s'f(s, r)$ y, en consecuencia, $r-s'f(s, r)$ deberá ser siempre un número negativo.

Hipótesis 2: f *satisface el Axioma Débil de la Preferencia Revelada* (AD de ahora en adelante):

"$s'f(s^*, r^*)+r^*-s^{*\prime}f(s^*, r^*) \leqslant r$ y $f(s^*, r^*) \neq f(s, r)$" implica "$s^{*\prime}f(s, r)+r-s'f(s, r) > r^*$" (16).

---

(14) Para la definición de valor característico véase la sección 4.

(15) Demostración: los elementos diagonales de $A-I$ son negativos y los restantes positivos. Puesto que $[A-I]x \ll 0$ para algún $x \geqslant o$, $[A-I]$ posee una diagonal dominante negativa de lo que se sigue el enunciado del texto. Véase L. Mc Kenzie [18] o J. Quirk y R. Saposnik [25], capítulo 5).

(16) En otras palabras, si con los precios s y la renta neta r se podía haber elegido $(f(s^*, r^*)'$ $r^*-s^{*\prime}f(s^*, r^*))$, pero se ha elegido $(f(s, r)'$, $r-s'f(s, r))$ entonces se requiere que cuando se escoge $(f(s^*, r^*)'$, $r^*-s^{*\prime}f(s^*, r^*))$, $(f(s, r)'$, $r-s'$ $f(s, r))$ no esté disponible.

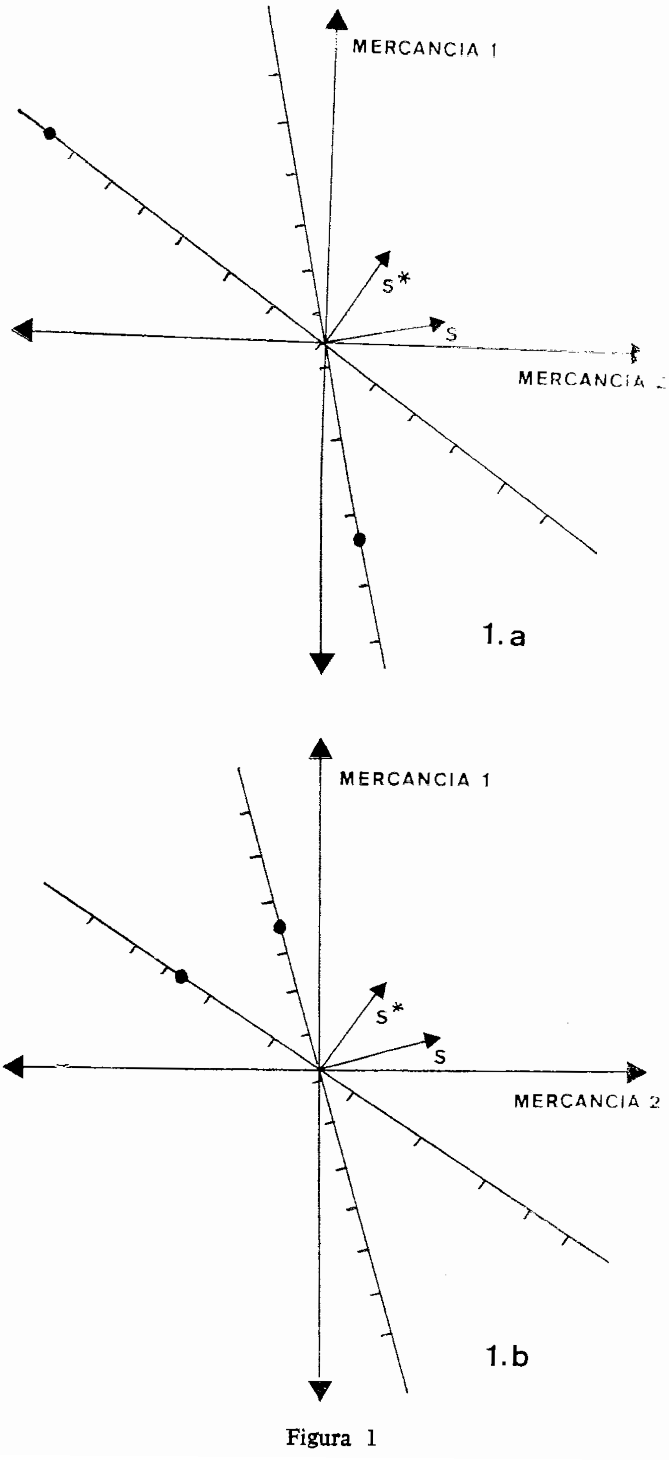


Figura 1

La figura 1.a representa una función de exceso de demanda que no satisface la hipótesis, en cambio la de la figura 1.b sí la cumple. El AD fue introducido por Samuelson (véase [27], Capítulo V) y recoge muy adecuadamente lo que es esencial en el comportamiento de un consumidor que maximiza una función de utilidad. Aunque, estrictamente hablando, la hipótesis es más débil, el lector hará bien en *visualizar la economía que estamos discutiendo como una en la que hay un solo consumidor, el cual determina sus demandas y ofertas por maximinación de una función de utilidad bajo la restricción presupuestaria dada por* s *y* r*; véase figura 2.*

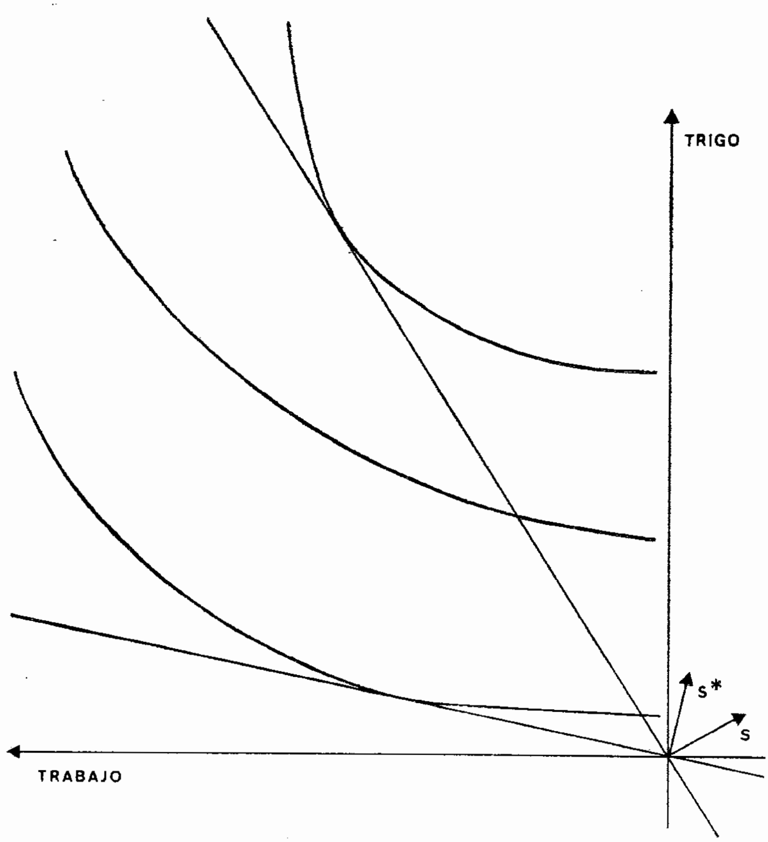


Figura 2

En una economía sin producción (que llamaremos de "puro intercambio") la renta neta será siempre igual a cero, puesto que la única fuente de renta para financiar la compra de productos es la venta de factores. Ahora bien, con producción convendrá en ocasiones tener en cuenta la renta originada en el sector de producción como beneficios o pérdidas. De ahí la aparición de r como un argumento independiente en la función de exceso de demanda (17) Para no vernos envueltos en complicaciones no sustanciales se ha supuesto que r puede tomar valores en el intervalo $(-\infty, \infty)$; un intervalo más realista (pero que incluye a O) bastaría.

Hipótesis 3 f *es continuamente diferenciable.*

Esta es una hipótesis puramente técnica.

Para cada sistema de precios $s \gg 0$ y renta neta $-\infty < r < +\infty$ definarse la matriz $(n+m) \times (n+m)$:

$$sf(s, r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial p_1} + f_1^1 \frac{\partial f_1^1}{\partial r}, \ldots, \ldots, \frac{\partial f_1^1}{q_m} + f_m^2 \frac{\partial f_1^1}{\partial r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m^2}{\partial p_1} + f_1^1 \frac{\partial f_m^2}{\partial r}, \ldots, \ldots, \frac{\partial f_m^2}{\partial q_m} + f_m^2 \frac{\partial f_m^2}{\partial r} \end{bmatrix}$$

donde todos los términos están evaluados en el punto (s, r).

La anterior es la clásica matriz de los *efectos de sustitución* o de *Slutsky* (véase P. Samuelson [27], Capítulo V; J. Henderson y R. Quandt [11], Capítulo 2).

Es bien sabido (véase P. Samuelson [27], Capítulo V) que la hipósis 2 implica:

La matriz Sf(s, r) *es negativa casisemedefinida para todo* $s \gg 0$, $-\infty < r < \infty$. *Es decir,* $v'\mathrm{Sf}(s, r)\, v \leqslant 0$ *para todo vector* v (*de* n+m *componentes*) [2]

Convendrá imponer una condición algo más fuerte que [2]:

Hipótesis 4: Para todo $s \gg 0$, $-\infty < r < \infty$, *la matriz* Sf(s, r) *es negativa casidefinida. Es decir,* $v'\mathrm{Sf}(s, r)\, v < 0$ *para todo vector* (*de* n+m *componentes*) *no nulo.*

No es difícil que la hipótesis 4 implica:

Si $(s, r) \neq (s^*, r^*)$ *entonces* $f(s, r) \neq f(s^*, r^*)$. *También para todo* s, r *la demanda de cualquier producto es estrictamente positiva.* [3]

(17) A pesar de que las tecnologías sean de rendimientos constantes a escala, la necesidad de incluir r como un argumento de las funciones de demanda surge tan pronto como se conisderan modelos de equilibrio general donde el estudio de estados de la economía que no sean equilibrios walrasianos es esencial (véase, en un contexto distinto, J. Silvestre [29]).

Una consecuencia poco atractiva de [3] es la no existencia de productos puramente intermedios, es decir, de productos cuya demanda para uso final en el consumo es nula. Quisiéramos subrayar, que aun cuando la hipótesis 4 tiene la virtud de facilitar la claridad del análisis, la esencia de los resultados que se obtendrán en este artículo no dependen de ella.

3. Equilibrio.

Dados vectores de niveles de producción x y de precios s los beneficios (o pérdidas) totales son (véase la sección 1):

$$x'(I-A', -B')s-x'b$$

Pondremos

$$r(x, s)=x'(I-A', -B')s-x'b.$$

Un vector de niveles de producción x *y un sistema de precios* s *constituirán un equilibrio competitivo walrasiano si, con renta neta* r(x, s):

(I) *La demanda de cada producto o factor es igual a la oferta de cada producto o factor.*

(II) *Los beneficios obtenidos en la producción de cada producto son los máximos compatibles con la tecnología y el sistema de precios; es decir, si los empresarios maximizan beneficios.*

Supondremos ahora que las hipótesis 1-4 se satisfacen. Entonces (en virtud de [3]) los niveles de producción de equilibrio son estrictamente positivos, y esto, a su vez, implica que los beneficios en la producción de cada producto son iguales a cero; en efecto, supóngase que los benecios (o pérdidas) en la producción de i fueran positivos, produciéndose el doble (o la mitad) se doblarían los beneficios (o se reducirían las pérdidas a la mitad) contradiciendo la condición de equilibrio (II). Lo anterior es una consecuencia bien conocida de la hipótesis de rendimientos constantes a escala.

En el lenguaje formal, las condiciones de equilibrio serán, por lo tanto:

(i) $$f(s, 0) = \begin{pmatrix} f^1(s, 0) \\ f^2(s, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [I-A]\,x \\ -B\,x \end{pmatrix}$$

(ii) $$[I-A', -B']\,s - b = 0$$

En la figura 3 se representa una situación de equilibrio. Nótese que la igualdad de la demanda y la oferta del factor numerario se sigue de (i) y (ii), ya que

$$-s'\,f(s, 0) = -\,s'\,[I-A, \;-B]\,x = -\,b'\,x$$

Se demostrará ahora que, bajo las mismas hipótesis, si la economía tiene un equilibrio, éste es necesariamente único. Sean (x, s), (x^*, s^*) dos equlibrios, entonces

$$x^{*\prime}[I - A', -B']s - x^{*\prime} b \leqslant 0 \quad \text{y} \quad x'[I - A', -B']s^* - x' b \leqslant 0$$

Pero

$$\begin{pmatrix} f(s, o) \\ \\ -s' f(s, o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(I - A') \\ -x' B' \\ -x' b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(s^*, o) \\ \\ -s^* f(s^*, o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{*\prime}(I - A') \\ -x^{*\prime} B' \\ -x^{*\prime} b \end{pmatrix}$$

lo que implica $s^{*\prime} f(s, o) - s' f(s, o) \leqslant o$ y $s' f(s^*, o) - s^{*\prime} f(s^*, o) \leqslant o$. Por la hipótesis 2, $f(s, o) = f(s^*, o)$ y, por tanto (utilizando [3], $x = x$ y $s = s^*$ como se quería demostrar.

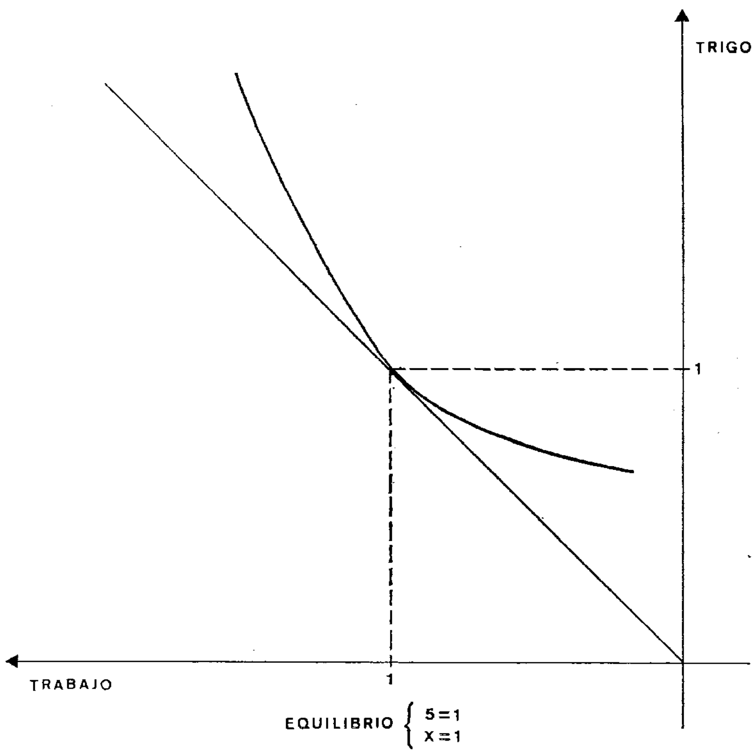


Figura 3

Obsérvese que si hay un solo factor de producción (es decir, si $m = o$) y si existe un equilibrio (x, p) con $x \gg o$ entonces éste es necesariamente único, cumpla o no f las hipótesis 2-4. En efecto, en el equilibrio, $[I - A] p - b = o$ y de aquí $p = [I - A]^{-1} b$ y $x = f([I - A]^{-1} b, o)$.

4. Sistemas dinámicos.

En los apartados sucesivos, y siguiendo a P. A. Samuelson (véase [27], Capítulo IX) se formalizará el *tâtonnement* walrasiano por medio de un sistema de ecuacones diferenciales. Ello permite recurrir, para su análisis, a la teoría matemática de los sistemas dinámicos en tiempo continuo. En esta sección enunciaremos algunas de las definiciones y resultados de esta teoría que se utilizarán más adelante. Buenas referencias son: W. Hurewcz [15], La Salle y Lefschetz [16] y P. Hartman [11].

Sea R^l el espacio euclídeo de l dimensiones, $R^l_{++}\{z \in R^l: z \gg o\}$ y g una función continua diferenciable de R^l_{++} a R^l. La ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dt} = g(z) \tag{4}$$

define un sistema dinámico. En lo sucesivo se abreviará dz/dz por $\dot{z}$. Para un z_0 una función $z(t)$ de un intervalo $[o, t^*]$ en R^l_{++} es una solución de [4] si $z_0(o) = z_0$ y, para todo $o \leqslant t < t^*$, $dz_0(t)/dt = g(z(t))$. Con las condiciones impuestas, y conviniendo que las soluciones se definen sobre sus intervalos de existencia máximos, existe una solución única para cada z_0; se demostrará por $z_0(t)$.

Un z^* es un punto estacionario, o de equilibrio, si $g(z^*) = o$. Siguiendo la terminología corriente en la literatura económica, diremos que *un equilibrio es localmente estable si para todo* z_0 *suficientemente cercano a* z, $z_0(t)$ *está definido para todo* $t \geqslant o$ *y* $\lim_{t\to\infty} z_0(t) = z$, o más precisamente, si existe un $\epsilon > o$ tal que si $||z_0 - z^*|| < \epsilon$ entonces la afirmación anterior es cierta. La figura 4 representa las trayectorias (curvas integrales) de un sistema con tres equilibrios, dos localmente estables y uno localmente no estable.

Sea z^* un punto de equilibrio. Una condición suficiente para que z^* sea localmente estable es que los valores característicos de la matriz

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1}(z^*), \ldots, \frac{\partial g_1}{\partial z_l}(z^*) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial g_l}{\partial z_1}(z^*), \ldots, \frac{\partial g_l}{\partial z_l}(z^*) \end{bmatrix}$$

tengan parte real negativa; los valores característicos son las soluciones del polinomio $|J - \lambda I| = o$. Si μ es un número complejo, $R_l(\mu)$ denotará su parte real.

Un equilibrio z^* *será globalmente estable si para todo* z_0, $z_0(t)$ *está definido para todo* $t \geqslant o$ *y* $\lim_{t \to \infty} z_0(t) = z^*$. Evidentemente, si un equilibrio es globalmente estable, entonces es único.

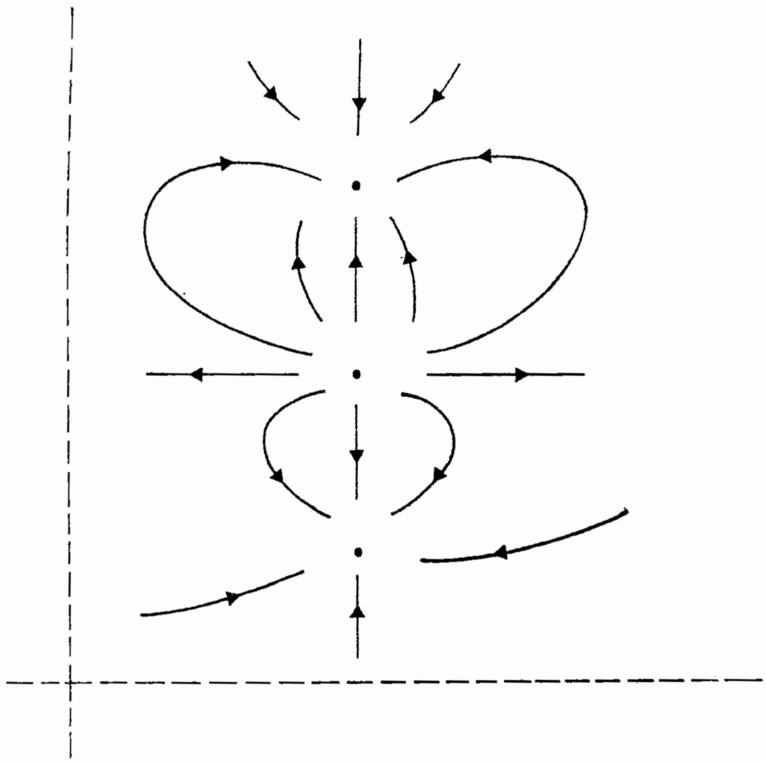


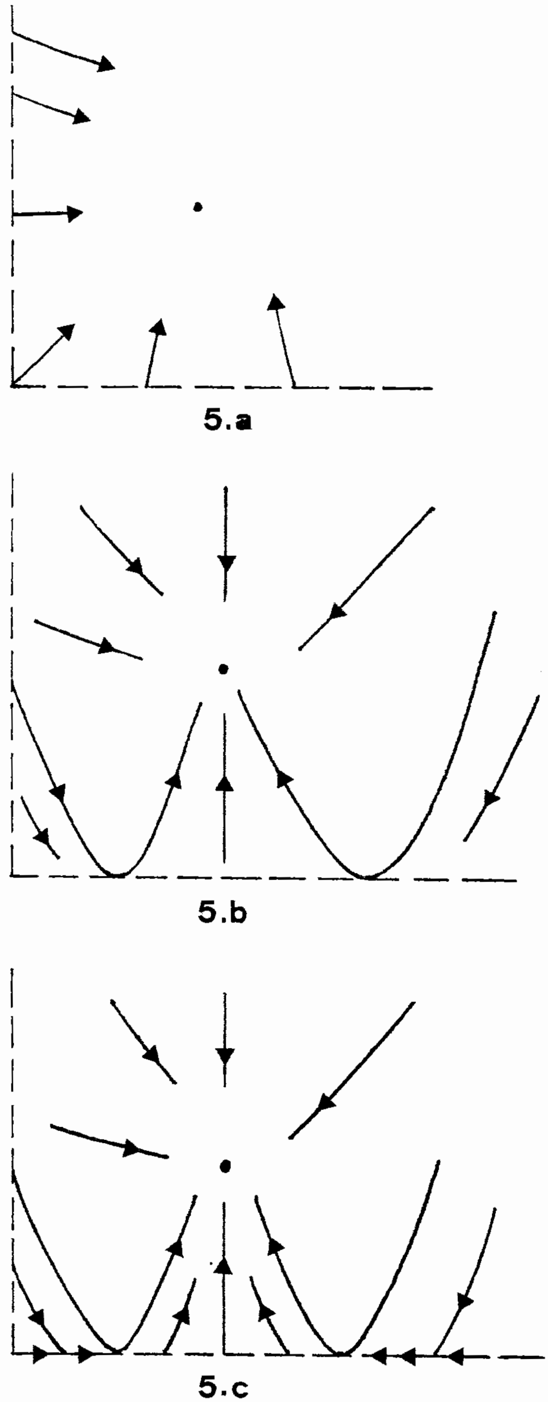
Figura 4

Hipótesis 5: Para todo z_0, *la trayectoria* $z_0(t)$ *está definida para todo* $t > o$ *y se mantiene alejada de la frontera de* R^{l}_{++}*; es decir, cualquier punto límite de* $z_0(t)$ *es estrictamente positivo.*

El sistema de la figura 5.*a* cumple la hipótesis, el de la figura 5.*b* no.

El siguiente resultado proporciona un instrumento muy útil para atacar el problema de determinar la estabilidad global de un sistema dado.

Si el sistema dinámico satisface la hipótesis 5 y existe una función con valores reales φ *definida en* R^{l}_{++} *tal que:* (i) $\varphi(z) = o$ si *y* sólo si z es un *equilibrio;* (ii) $\varphi(z) > o$ y $d\varphi(z)/dt < o$ *si* z *no es un equilibrio, entonces un equilibrio del sistema es globalmente estable.*



5.a

5.b

5.c

Figura 5

La función φ es una función distinta, también llamada de Lyapunov. El resultado (que no es nada trivial) es muy intuitivo, afirma que si se puede definir la noción de distancia de tal forma que ésta decrezca monótonamente a lo largo de trayectorias, entonces éstas convergen hacia el equilibrio.

Los sistemas dinámicos que discutiremos en los próximos apartados no cumplirán necesariamente la hipótesis 5. Sin embargo, procederemos como si la cumplieran. Ello, probablemente, es excusable en atención a tres razones:

(i) No es difícil, en cada caso, formular explícitamente condiciones que garantizan el cumplimiento de la hipótesis (del tipo: cuando un precio es cero la demanda es infinita, etc.).

(ii) No queremos vernos envueltos aquí con problemas de dificultad no conceptual sino meramente técnica.

(iii) Todos los resultados que se darán son correctos si el sistema dinámico se formulase desde el principio en la forma *que es realmente apropiada;* más específicamente, si se supiera que g está definida en $\{z \in R^l : z \geqslant o\}$ y se pusiese

$$\frac{dz}{dt} \begin{cases} = o & \text{si} \quad z_i = o \quad \text{y} \quad g_i(z) < o \\ = g_i(z) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(en nuestro problema, z serán precios y niveles de producción; los mismos pueden hacerse cero pero no pueden ser negativos).

Como ilustración de este último punto, considérese el sistema de la figura 5.b, no es globalmente estable, pero una vez se ha extendido y definido en la frontera del cuadrante positivo en la forma indicada más arriba (figura 5.c), el sistema *es* globalmente estable.

Adviértase que la modificación sugerida en (iii) nos obligaría a considerar ecuaciones diferenciales discontinuas, aunque de un tipo muy simple y plenamente (véase C. Henry [13]). Aún así, en aras a la simplicidad, preferimos evitar esta complicación.

III. UN ANALISIS DEL *TÂTONNEMENT* WALRASIANO

La connotación que la idea de equilibrio conlleva es la de una situación estacionaria donde no hay tendencia alguna al movimiento; así, en un estado de la economía que no es de equilibrio esperamos encontrar fuerzas dinámicas que llevan al cambio.

Como contrapartida a las condiciones de equilibrio (I) y (II) —parte II, sección 3— Walras postula dos principios dinámicos (dos "leyes") para una economía productiva que no está en equilibrio (18):

(I') *Si la demanda de una mercancía es superior a la oferta el precio sube, y recíprocamente si la demanda es inferior a la oferta* (*"Loi de l'offre et de la demande"*).

(II') *Si el precio de un producto es superior a su coste, la producción aumenta, y recíprocamente si el precio es inferior al coste* (*"Loi de revient"*).

Resumiremos brevemente el contenido de la teoría del *tâtonnement.* Supóngase (y esto es, obviamente, una ficción) que un agente ajeno a las partes que se encuentran en los mercados (al que llamaremos *el árbitro)* elige al azar y anuncia un sistema de precios y un vector de niveles de producción. Tomando los precios como datos, consumidores y productores computan y anuncian sus demandas y ofertas y sus beneficios respectivamente. Si la situación es de equilibrio el árbitro permite que los contratos se cierren, por el contrario, si la situación no es de equilibrio el árbitro suspende la realización de contratos, modifica de acuerdo con (*I'*) y (*II'*) los precios y producciones propuestas y el proceso se repite. La idea de Walras es: (i) si el mecanismo descrito se itera un número suficiente de veces, se llega a una situación de equilibrio (ii) el proceso representa de una forma estilizada el funcionamiento real de los mercados. En consecuencia, si la teoría pudiera asentarse sobre bases sólidas se tendría, en primer lugar, una explicación, por analogía de cómo los mercados computan los precios de equilibrio (una cuestión que se remite a la estabilidad global del *tâtonnement)* y, en segundo lugar, una justificación de un postulado implícito de estabilidad interna del equilibrio (pequeñas perturbaciones no inducen grandes perturbaciones); fundamentar esta segunda afirmación la estabilidad local del *tâtonnement* bastaría.

Pasaremos, pues, a estudiar el funcionamiento de un *tâtonnement* basado en los principios *I'* y *II'* en el contexto de las economías productivas descritas en la parte II. Siguiendo a P. Samuelson (véase [27], capítulo IX) el *tâtonnement* se formalizará como un sistema dinámico. Las variables estado (es decir, las independientes) serán el sitema de precios s y el vector de niveles de producción x.

Dado s y x para determinar la demanda final del sector consumo (o consumidor, de ahora en adelante) hace falta especificar la renta neta r. Puesto que en el equilibrio $r=o$, es natural en una primera aproximación,

(18) Véase *Eléments,* Capítulo 21, página 230.

suponer que, con independencia de si la situación es de equilibrio o no, el consumidor reacciona como si su renta neta fuese la de equilibrio; es decir, nula. Esta hipótesis no implica ninguna forma de comunicación al margen del mercado entre consumidores y productores y es, por lo tanto, muy satisfactoria.

Así, el primer sistema dinámico de *tâtonnement* que examinaremos será (en notación matricial):

$$\dot{s} = K\left[f(s, o) + \begin{pmatrix}(A-I)x \\ Bx\end{pmatrix}\right] \qquad [5]$$

$$\dot{x} = Q\{[I-A', -B']\,s - b\} \qquad [6]$$

donde K (que es $n+m \times n+m$) y Q (que es $n \times n$) son matrices diagonales de velocidad de ajuste. Es inmediato que [5] y [6] obedecen las leyes impuestas por I' y II', respectivamente (19).

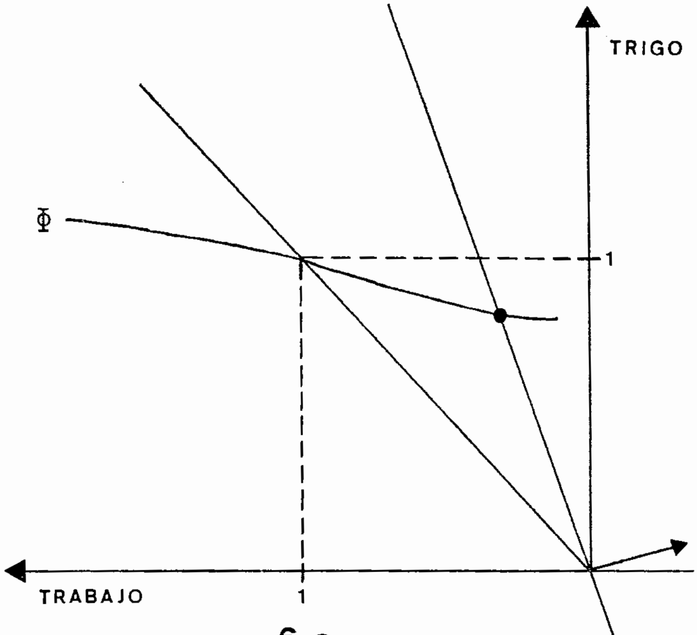
Por desgracia (y postulando las hipótesis de la parte II) un equilibrio del sistema determinado por [5] y [6] no precisa ser estable ni aún localmente. No es difícil presentar gráficamente un ejemplo de inestabilidad para el caso de un factor y un producto.

En la figura 6.a la demanda al precio s viene dada por la intersección de Φ con la recta perpendicular al vector de precios; el equilibrio es $s=1, x=1$. Se ve cómo, partiendo del equilibrio, si aumenta el precio del producto se crea exceso de demanda del mismo y, por lo tanto, aquel tenderá a aumentar aún más; en consecuencia, y sean cuales fueren las velocidades de ajuste, el diagrama de trayectorias en la vecindad del equilibrio será como el de la figura 6.b, que no es estable.

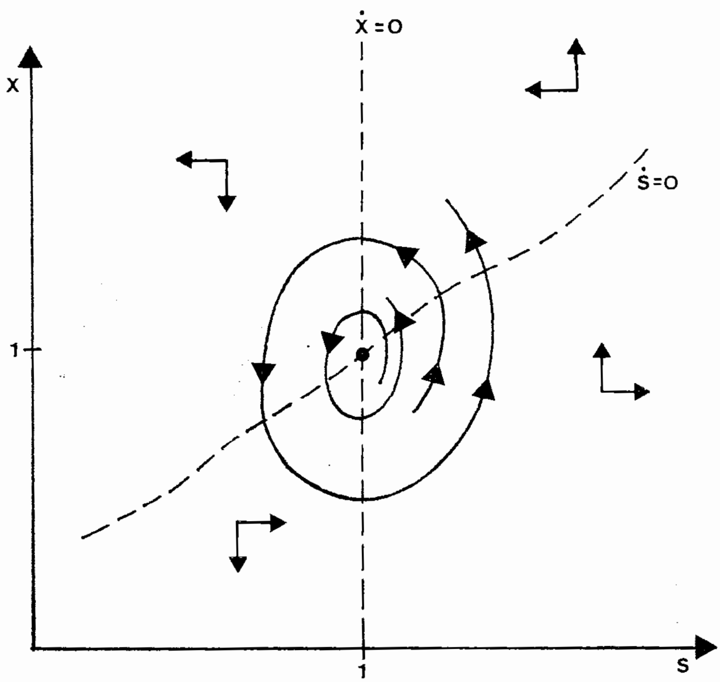
Por supuesto, el ejemplo del párrafo anterior no es satisfactorio pues se basa en la existencia de bienes inferiores (20). Sin embargo, si se dispone de más de dos mercancías no hay dificultad alguna en construir ejemplos más realistas. Aun así, el ejemplo ilustra muy bien cuál es la dificultad con que nos encontramos: en el *tâtonnement* que se está considerando, y a diferencia del caso de puro intercambio, la hipótesis de que la demanda excedente satisface el AD no basta para eliminar en el equi-

(19) Pero no son las únicas especificaciones posibles de las mismas. En particular, si se piensa que los beneficios por unidad producida no influyen sobre los incrementos absolutos de la escala de producción sino sólo sobre los incrementos relativos, habría que sustituir cada $\dot{x}_i$ or $\dot{x}_i/x_i$ en el lado izquierdo de[6]; tal cambio no afectaría ninguno de los resultados que se obtendrán en éste artículo.

(20) Un bien es *inferior* si un aumento de renta induce una disminución de demanda. La única forma en que el aumento del precio de un bien puede provocar un aumento de su demanda, es que el bien sea inferior y el efecto renta domine al efecto sustitución.



6.a



6.b

Figura 6

librio los efectos renta. Ya Hicks (en [14]) determinó que la fuente primera de inestabilidad son las influencias asimétricas de aquellos.

Antes de abandonar el sistema [5] [6] mencionaremos que M. Morishima [22] ha alcanzado algunos resultados de inestabilidad global para el mismo; sin emgargo, las condiciones que precisa imponer en la función de exceso de demanda son muy fuertes y difíciles de interpretar (21).

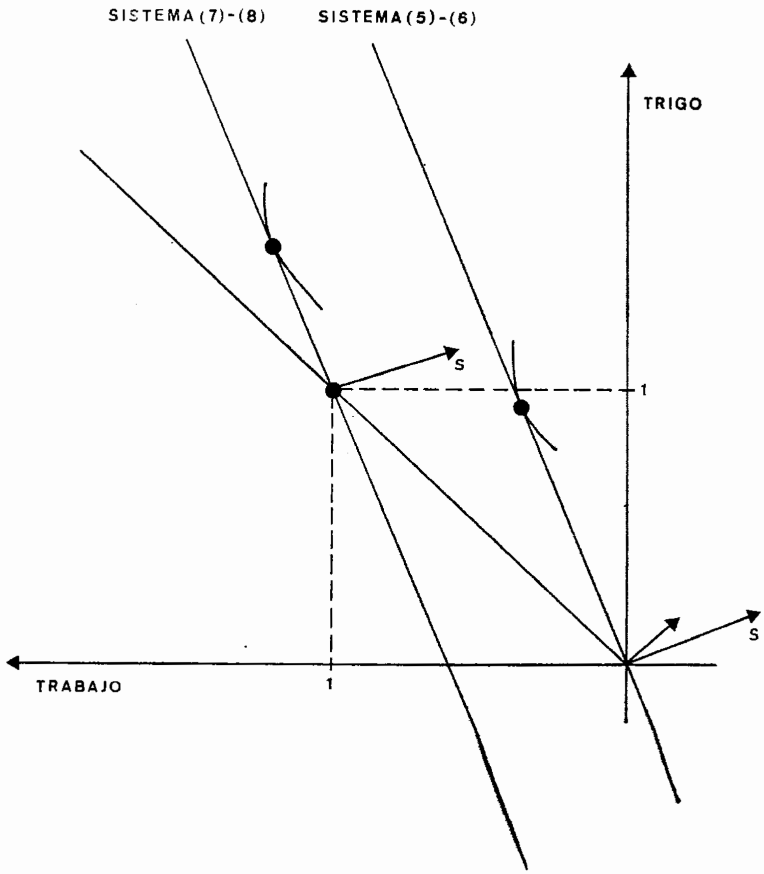


Figura 7

La segunda variedad de *tâtonnement* que se estudiará, difiere de la primera en que ahora supondremos que, dado s y x, la renta neta del consumidor es igual a los beneficios o pérdidas de los empresarios $r(x, s)$. Esta forma de proceder tiene la ventaja (y esto será decisivo) de que fuera del equilibrio las igualdades presupuestarias se mantienen: el total

(21) Problema: ¿Son válidos los resultados de Morishima si el sistema [5] [6] se reformula en la nota 18?

de gastos iguala el total de ingresos. La hipótesis es artificial en la medida que supone algún tipo de comunicación entre empresarios y consumidores y que elimina la responsabilidad limitada (los "accionistas" son responsables de las pérdidas en que incurren las empresas).

Recuérdese que, dado s y x, $r(x, s)=x'[(I-A', -B')s-b]$ son los beneficios-pérdidas totales; la renta será siempre igual a esta cantidad.

El proceso de ajuste será idéntico a [5] y [6] excepto que se sustituye o por $r(x, s)$:

$$\dot{s} = K\left[f(s, r(x, s)) + \begin{pmatrix}(A-I)x \\ Bx\end{pmatrix}\right] \tag{7}$$

$$\dot{x} = Q[[I-A', -B]s-b] \tag{8}$$

Las diferencias entre las reacciones de los sistemas [5] - [6] y [7] - [8] en una vecindad del equilibrio pueden apreciarse en la figura 7.

Sean s^*, x^* el punto de equilibrio. Fórmese las matrices (que son $(n+m)\times(n+m)$ y $(n+m)\times n$, respectivamente):

$$E_s = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1^1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial f_1^1}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial p_1}, \dots & \dots, \dfrac{\partial f_1^1}{\partial q_m} + \dfrac{\partial f_1^1}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial q_m} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m^2}{\partial p_1} + \dfrac{\partial f_m^2}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial p_1}, \dots & \dots, \dfrac{\partial f_m^2}{\partial q_m} + \dfrac{\partial f_m^2}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial q_m} \end{bmatrix}$$

$$E_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1^1}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f_1^1}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f_m^2}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f_m^2}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

donde todos los términos están evaluados en el punto (s^*, x^*).

Puesto que $[I-A', -B']s^*-b=o$ la matriz Jacobiana J del sistema [7]-[8] en el punto s^*, x^* (es decir, donde $\dot{s}=o$, $\dot{x}=o$) es:

$$J = \begin{bmatrix} K & O \\ O & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_s & E_x + \begin{bmatrix} A-I \\ B \end{bmatrix} \\ [I-A', -B'] & 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que $r(x, s^*)=o$ para todo x, tendremos que, en el punto s^*, x^*, $\partial r/\partial x_i=o$ para todo i. Por lo tanto $E_x=o$.

Por otra parte, denotando

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\left(\frac{\partial r}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial r}{\partial q_m}\right)$$

tenemos

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\begin{pmatrix}[I-A]\,x\\ -B\,x\end{pmatrix}=f(s^*)\,r\,(x^*, s^*)$$

y sustituyendo en la expresión por E_s se obtiene

$$E_s=Sf(s^*, o)$$

En definitiva:

$$J=\begin{bmatrix}K & O\\ O & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Sf(s^*, o) & \begin{bmatrix}A-I\\ B\end{bmatrix}\\ [I-A', -B'] & O\end{bmatrix}$$

La consecuencia de pasar del sistema [5] - [6] *al* [7] - [8] *ha sido, pues, la eliminación de los efectos renta en el punto de equilibrio.*

Proposición 1: Bajo las hipótesis 1-4, *un equilibrio del sistema* [7]-[8] *es localmente estable.*

Demostración: La matriz J puede escribirse de la siguiente forma

$$J=\begin{bmatrix}K & O\\ O & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V & R\\ -R' & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}KV & KR\\ -QR' & O\end{bmatrix}$$

donde V es $(n+m)\times(n+m)$ y negativa casi definida y R es $(n+m)\times n$.

Debemos probar que todas las (posiblemente complejas) raíces características de J tiene parte real negativa. En lo sucesivo operaremos con la matriz J como si fuese una matriz con elementos complejos. Para el formalismo de las operaciones con números complejos véase P. Halmos [10].

Sea λ una raíz característica de J y $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ un vector característico. Por definición:

$$KVu-\lambda u+KRv=o \quad \text{y} \quad -QR'u-\lambda v=o$$

Por lo tanto:

$$0=(KVu-\lambda u+KRv, K^{-1}u)=(KVu, K^{-1}u)-\lambda(u, K^{-1}u)+$$
$$+(KRv, K^{-1}u)=(Vu, u)-\lambda(u, K^{-1}u)+(Rv, u) \quad \text{y} \quad o=(QR'u-\lambda v, Q^{-1}v)=$$
$$=(-QR'u, Q^{-1}v)-\lambda(v, Q^{-1}v)=-(R'u, v)-\lambda(v, Q^{-1}v)=-(u, Rv)-\lambda(v, Q^{-1}v).$$

Sumando

$$(Vu, u) - \lambda(u, K^{-1}u) - \lambda(v, Q^{-1}v) + (Rv, u) - (u, Rv) = o$$

Ahora bien, $(u, K^{-1}u)$, $(v, Q^{-1}v)$ son números reales positivos en tanto que $(Rv, u)-(u, Rv)$ es puramente imaginario; en consecuencia, signo $Re(\lambda)$=signo $Re(Vu, u)$. Pero, por la hipótesis 4, $Re(Vu, u) < o$. Esto concluye la demostración.

El autor se ha convencido de que, en general, el resultado anterior no es mejorable; anque estable localmente el equilibrio del sistema [7] - [8] puede no serlo globalmente. Situaciones como la de la figura 8 son posi-

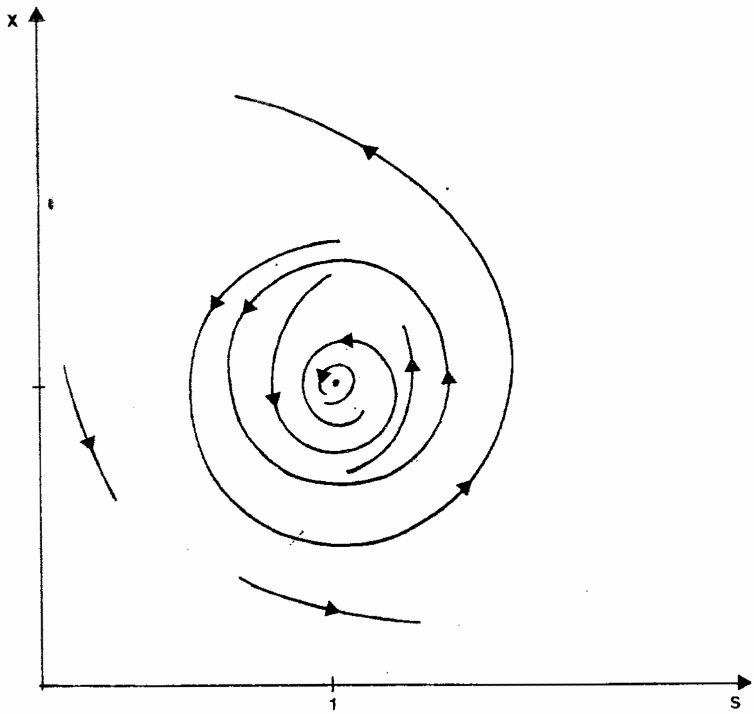


Figura 8

bles. Parece imponerse, pues, la conclusión de que, aún con la enorme restricción que el AD representa, no puede confiarse en que el *tâtonnement* funcione satisfactoriamente en una economía productiva, al menos si a éste se le entiende como un algoritmo computacional.

Una manera de escapar a la conclusión del párrafo anterior es seguir el ejemplo de K. Arrow y L. Hurwicz en [4] y, previa introducción explícita de una función de utilidad, formular el *tâtonnement* de tal forma que el sistema dinámico aparezca como el gradiente de un lagrangeano cóncavo-convexo. En el presente artículo no se seguirá esta vía; el método de Arrow y Hurwicz es apropiado para una economía centralizada pero no es fácilmente interpretable en el contexto de las economías walrasianas, que son de propiedad privada (22).

Todas las versiones del *tâtonnement* en economías productivas que han sido propuestas hasta la fecha (incluyendo las que se han examinado anteriormente y la de Arrow y Hurwicz en [4] adolecen de un defecto más sutil que el de no convergencia global: *aunque las trayectorias puedan converger (local y globalmente) la harán, en general, de una forma espiral, en otras palabras, en economías productivas el* tâtonnement *tiene una tendencia intrínseca a los ciclos y, por lo tanto, la aproximación al equilibrio podrá ser muy lenta.* Matemáticamente ello se debe a la necesaria aparición (excepto en casos límite) de raíces complejas como soluciones del polinomio característico del sistema (en el equilibrio). La razón sustantiva es que el *tâtonnement* (en un contexto productivo) es un método esencialmente indirecto. Merece la pena examinar este punto más detenidamente.

Si s, x no es un equilibrio entonces, por definición, o bien (*i*) los precios de los productos son distintos de los costes de producción, o bien (*ii*) los niveles de producción son distintos de las demandas. Un método obvio de ajuste, y que si existe un sólo factor no necesita ser completado adicionalmente, es el siguiente: auméntese (o disminúyase) cualquier precio que sea inferior (o superior) a su coste de producción, auméntese (o disminúyase) la producción de cualquier bien para el que la demanda sea superior (o inferior) a la oferta. A éste lo llamaremos el *método directo;* nótese que es enteramente no walrasiano, las leyes de reacción del sistema son ajenas a los principios (*I'*) y (*II'*) del *tâtonnement*, éste es un mecanismo indirecto, las variaciones de los precios no dependen de los desajustes de los mismos, sino de los desajustes de las cantidades (produciones) dependen de los desajustes de los precios. Es intuitivo que el método directo tiene más probabilidades de ser estable que el *tâtonnement*.

Como ilustración considérese el siguiente ejemplo (un tanto extremo) con un factor y un producto. Supóngase que la demanda del producto es constante e igual a 1 (en aras a la simplicidad no requerimos que la hipótesis 4 se cumpla); la técnica productiva permite transformar una unidad de factor en una unidad de producto. El equilibrio es entonces, $s=1$ y

(22) Además, el procedimiento no es invariante respecto a transformaciones monótonas de los índices de utilidad y, aunque ello no cree ninguna dificultad conceptual, no queremos vernos envueltos con este problema.

$x=1$. Para velocidades de ajuste igual a 1 el sistema [7] - [8] (ó [5] - [6]) toma la forma:

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 - x \\ \dot{x} = s - 1 \end{cases}$$

y es fácil ver que las trayectorias son circulares concéntricas alrededor del equilibrio (23); véase la figura 9.a. En cambio, el sistema dinámico del método directo es, claramente:

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 - s \\ \dot{x} = 1 - x \end{cases}$$

y el diagrama de trayectorias es el de la figura 9.b; las trayectorias se acercan al equilibrio por el camino más corto.

Es un fenómeno conocido, que modelos teóricos con idénticos equilibrios admitan especificaciones dinámicas distintas y con resultados cualitativos muy diversos. Por supuesto, Walras no eligió sus principios dinámicos *I'* y *II'* al azar, sino que los adoptó porque, de forma idealizada, reflejaban las fuerzas dinámicas reales que se encuentran en los mercados *competitivos,* insertos en el marco institucional de la propiedad privada. Por ejemplo, el *método directo* descrito más arriba carece de justificación en ese marco institucional; en particular, las empresas (y, de hecho, no puede haber más de una por producto) y deberían ejercer un cierto grado de control sobre los precios, lo cual no es reconciliable con la hipótesis de que prevalece la competencia perfecta.

Aun a riesgo de repetirnos, queremos subrayar que las consideraciones institucionales son cruciales a la hora de argumentar la bondad teórica de la formulación walrasiana del *tâtonnement.* O. Lange [17] propuso la utilización del mismo para resolver el problema del cálculo económico en economías socialistas (24). Ahora bien, en este nuevo contexto los méritos del *tâtonnement* deben discutrse en base a criterios como la capacidad de computación descentralizada, la eficiencia computacional, etc., y nuestra impresión es que la medida en que el *tâtonnement* sea sustituible por el "método directo" éste resultará más efectivo: no es ni más ni menos "descentralizado" que el *tâtonnement* y computa los valores de equilibrio

(23) Demostración:

$$\frac{d\,||\,x-1,\,p-1\,||}{dt} = 2\,(x-1)\,\dot{x} + 2\,(p-1)\,\dot{p} = 2\,(x-1)\,(p-1) + 2\,(p-1)\,(1-x) = 0$$

(24) Su teoría fue clarificada y formulada con rigor por Arrow y Hurwicz [4].

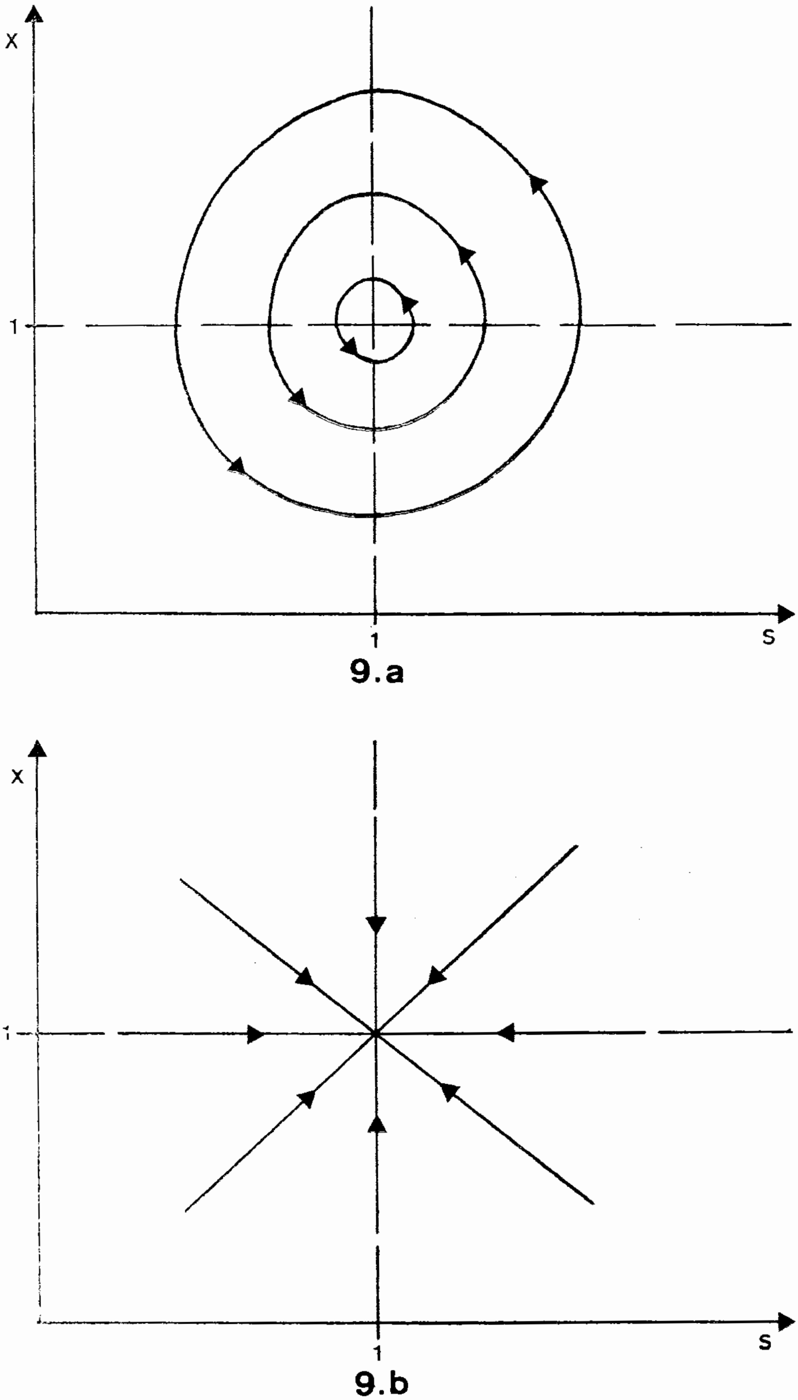


Figura 9

mucho más deprisa y directamente (25). En cualquier caso queremos hacer hincapié en que si el problema es el de elegir un método de cálculo para una economía socialista no hay nada sagrado en el *tâtonnement*, éste es un procedimiento más entre muchos otros, seguramente no el más eficiente (26).

En una economía de puro intercambio la hipótesis de que el exceso de demanda satisface AD basta para asegurar la convergencia global del *tâtonnement*. Hemos visto que en una economía productiva ello no es así; sin embargo, si la economía sólo tiene un factor de producción, entonces el método directo computa los precios y las escalas de producción sin ninguna hipótesis especial sobre el exceso de demanda (esto se demostrará en el próximo apartado). El caso en que hay varios factores de producción es más fácil. Para cada vector de precios de los factores el método directo puede computar los precios de los productos y las escalas de producción para los que se equilibran los mercados de productos y se anulan los beneficios.

Sin embargo, ¿cómo determinar los "precios sombra" de los factores, es decir, aquellos que eliminan los excesos de demanda o de oferta de los factores? Podría pensarse en combinar el método directo con el *tâtonnement*: para precios dados de factores, aquél se aplicará para computar precios de productos y escalas de producción; hecho esto, se usaría el *tâtonnement* en los mercados de factores. La esperanza sería que, drásticamente limitado el alcance del *tâtonnement*, el cumplimiendo del (AD) por parte del exceso de demanda (de productos y factores) sea suficiente para obtener estabilidad global. Que ello es así se demostrará en el próximo apartado. El procedimiento delineado es, esencialmente, el mismo que propusiera F. M. Taylor [31] en el contexto de la controversia sobre el socialismo. Variedades del mismo han sido estudiadas por M. Morishima [22], K. Arrow y F. Hahn [3], 12.10), y E. Malinvaud [19].

---

(25) Lo que aquí estamos llamando método directo, y cuya formulación precisa se aclarará más adelante, este compuesto de piezas sacadas de la teoría *input-output* de Leontief. Para una contrastación, en el contexto de la teoría de la planificación, entre el *tâtonnement* y un "procedimiento para la tecnología de Leontief-Samuelson análogo al método directo" véase E. Malivaud [19], secciones III y IV).

(26) Véase E. Malinvaud [19].

IV. UNA FORMULACION DEL METODO DE TAYLOR

El procedimiento que ahora se estudiará será secuencial. Para precios dados q de los factores se determinarán primero, por el método directo, los precios de los productos $p(q)$ y los niveles de producción $x(q)$ para los que los beneficios y los excesos de demanda (o de oferta) en los mercados de productos son nulas. Después, y suponiendo que p y x igualan siempre las cantidades de equilibrio ($p(q)$ y $x(q)$, respectivamente) se aplicará el *tâtonnement* a los factores aumentando (o disminuyendo) el precio de aquellos para los que hay exceso de demanda (o de oferta).

Grosso modo, la secuencialidad del procedimiento es equivalente a suponer que las velocidades de ajuste para x y p son infinitamente mayores que las que se aplican a q.

Intuitivamente, la plausibilidad de que el AD sea suficiente para asegurar estabilidad global se sigue de las dos observaciones siguientes: (i) el método directo converge siempre, (ii) si los precios de los productos y las escalas de producción se mantienen siempre ajustados, los mercados de factores son formalmente equivalentes a los mercados de una economía de puro intercambio.

La descripción y estudio de las dos etapas del mecanismo se efectuará, respectivamente, en las dos secciones siguientes.

1. El método directo.

Sea q^* un vector de precios de los factores. Permanecerá fijo por el resto de esta sección.

Los precios de los productos $p(q^*)$ y los niveles de producción $x(q^*)$ que dejan en equilibrio a las empresas y a los mercados de productos son (27).

$$\begin{cases} p(q) = [I - A^1]^{-1}(B'q + b) \\ x(q) = f^1(p(q),\ q,\ o) + Ax. \end{cases}$$

Para la formalización del método directo cualquier hipótesis sobre el valor de la renta neta es adecuada. Por simplicidad (de notación y conceptual) la tomaremos como idénticamente igual a cero. Tal hipótesis está ya implícita en las fórmulas arriba transcritas.

---

(27) Para ser completamente rigurosos aquí hay que suponer que $f^1(s, o) \gg o$ para todo s.

Dados p y x (y, por supuesto, q) el vector de demandas totales de productos es $f^1(p, q^*, o)+Ax$ y el de ofertas es x, el vector de costes de producción es $A'p+B'q+b$ y el de precios, por supuesto, p.

En consecuencia, una formulación del método directo es:

$$\begin{cases} \dot{p}=K[p-A'p-B'q^*-b] & [9] \\ \dot{x}=Q[f^1(p, q^*, o)+Ax-x] & [10] \end{cases}$$

donde K y Q son matrices diagonales positivas de velocidades de ajuste, esta vez ambas $n \times n$. Claramente, el equilibrio, único, del sistema [9]-[10] es $p(q^*)$, $x(q^*)$.

Proposición 2: Un equilibrio del sistema [9]-[10] *es globalmente estable* (cumpla o no f el AD).

Demostración: El sistema [9]-[10] puede escribirse en la forma "triangular":

$$\begin{cases} \dot{p} = h_1(p) \\ \dot{x} = h_2(p, x) \end{cases}$$

y se tiene (en virtud de [1] y el hecho que sistemas dinámicos originados por ecuaciones lineales son globalmente estables si y sólo si lo son localmente): (i) $\dot{p}=o$ determina un equilibrio globalmente estable de $\dot{p}=h_1(p)$, (ii) para cada p^*, $\dot{x}=o$ determina un equilibrio globalmente estable de $\dot{x}=h_2(x, p^*)$. Estas condiciones son suficientes para garantizar la estabilidad global del sistema [9]-[10]; véase Markus y Yamabe [21]. Intuitivamente, lo que ocurre es que la convergencia de la variable p es independiente de x y, por lo tanto, después de un período temporal más o menos largo, pero independiente de la posición inicial de x, $p_0(t)$ será prácticamente una constante igual a $p(q^*)$ y la estabilidad global de $x=h_2(x, p(q))$ implicará entonces la convergencia final de la variable x a sus valores de equilibrio.

2. El tâtonnement en el mercado de factores.

Se supondrá ahora que, dado q, los precios de los productos y los niveles de producción toman instantáneamente los valores de equilibrio $p(q)$, $x(q)$ de la sección anterior.

Así, dado q, el vector de demandas de factores es $Bx(q)$ y el de ofertas $-f^2(p(q), q, o)$. Por lo tanto, una versión del *tâtonnement* sería:

$$\dot{q}=H[Bx(q)+f^2(p(q), q, o)] \qquad [11]$$

donde H es una matriz diagonal positiva $m \times m$.

Para cada q, sea

$$s(q)=\begin{pmatrix} p(q) \\ q \end{pmatrix}, \qquad h(q)=Bx(q)+f^2(s(q), o)$$

Para evitar complicaciones no sustanciales, supondremos en lo sucesivo que $q \neq q^*$ implica $f(q, o) \neq f(q^*, o)$ (28).

Proposición 3: Si a función de exceso de demanda satisface el AD (hipótesis 2) entonces un equilibrio del sistema [11] *es globalmente estable.*

Demostración: Se verá primero que h, considerada como una función de exceso de demanda, satisface el AD en la forma (véase la sección 2 de la parte II):

"si $q^{*\prime}h(q)-q'h(q) \leqslant o$ y $q \neq q^*$ entonces $q'h(q^*)-q^{*\prime}h(q^*)>o$" [12]

Puesto que f satisface el axioma y $f(q, o) \neq f(q^*, o)$, basta demostrar que la siguiente igualdad es, de hecho, una identidad:

$$q^{*\prime}h(q)-q'h(q)=s(q^*)'f(s(q), o)-s(q)'f(s(q), o) \qquad [13]$$

Haciendo uso de las igualdades

$$f^1(s(q), o)=[I-A]x(q), \qquad p(q^*)'=(q^{*\prime}B+b')[I-A]^{-1},$$
$$p(q)'=(q'B+b')[I-A]^{-1}$$

se obtiene

$$p(q^*)'f^1(s(q), o)-p(q)'f^1(s(q), o)=q^{*\prime}Bx(q)-q'Bx(q)$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} s(q^*)'f(s(q), o)-s(q)'f(s(q), o)= \\ =q^{*\prime}f^2(s(q), o)-q'f^2(s(q), o)+ \\ +p(q^*)'f^1(s(q), o)-p(q)'f^1(s(q), o)= \\ =q^{*\prime}f^2(s(q)-q'f^2(s(q), o)+q'Bx(q)- \\ -q'Bx(q)=q^{*\prime}(f^2(s(q), o)+Bx(q))- \\ -q'(f^2(s(q), o)+Bx(q)=q^{*\prime}h(q)-q'h(q), \end{aligned}$$

que es, precisamente, la igualdad [13].

---

(28) En virtud de [3] esto se cumple si f satisface las hipótesis 2-4. Puesto que supondremos que satisface la 2, la restricción es realmente muy ligera y, en cualquier caso, completamente dispensable.

Sea q^* un equilibrio de [11], entonces [12] toma la forma:
"Si $q \neq q^*$ entonces

$$q^{*\prime}h(q) - q'h(q) > o\text{"} \quad [14],$$

lo que implica que el equilibrio de [11] es único.

Sea $V(q) = (q - q^*)' H^{-1}(q - q^*)$. Entonces $V(q) \geqslant o$ para todo q y $V(q) = o$ si y sólo si $q = q^*$. Veremos que si $q \neq q^*$, entonces $\frac{d\,V(q)}{dt} < o$; por lo tanto, V es una función de Lyapunov y, en virtud de [4], la convergencia blogal a q quedará demostrada.

Tómese $q \neq q^*$, entonces $\frac{d\,V(q)}{dt} = 2\ (q - q^*)' H^{-1} q = 2(q - q^*) H^{-1} H h(q) =$
$= 2q' h(q) - 2q' h(q) < o$ (por [14]. Esto concluye la demostración.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARROW, K.: "Toward a theory of price adjusment", en M. Abramoritz, ed. *The Allocation of Economic Resources*, Stanford University Press, 1959.

[2] ARROW, K. H., BLOCK y L. HURWICZ: "On the stability of the competitive equilibrium",II, *Econometrica*, 27, 1959.

[3] ARROW, K. y F. HAHN: *General Competitive Analysis.* Holden-Day, San Francisco, 1971.

[4] ARROW, K. y L. HURWICZ: "Decentralization and Computation in resource allocation", en R. Pfouts, ed. *Essays in Economics and Econometrics*, The University of North Carolina Press, 1960.

[5] ARROW, K. y L. HURWICZ: "On the stability of the competitive equilibrium I, *Econometrica*, 26, 1958.

[6] DEBREU, G.: "Economies with a finite set of equilibria", *Econometrica*, 38, 1970.

[7] DEBREU, G.: "Excess demand functions", *Journal of Mathematical Economic*, 1, 1974.

[8] DORFMAN, R. P. SAMUELSON y R. SOLOW: *Linear Programming and Economic Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1958.

[9] GALE, D.: *The Theory oñ Linear Economics Models*, Mc Graw-Hill, New York, 1960.

[10] HALMOS, P.: *Finite Dimensional Vector Spaces.* Van Nostrand, Princeton N. J., 1958.

[11] HARTMAN, P.: *Ordinary Differential Equation.* John Wiley, 1964.

[12] HENDERSON, J. y R. QUANDT: *Microeconomic Theory*, Mc Graw-Hill, New York, 1958.

[13] HENRY, C.: "Differential equations with discontinuous rigth-hand side", *Journal of Economic Theory*, 1971.

[14] HICKS, J.: *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford, 1939.

[15] HUREWICZ, W.: *Lectures on Ordinary Differential Equations*, The M. I. T. Press, Cambridge, Mass, 1958.