Contribució de l'estudiant Adrian Segura (estudiant 2n ADE/ECO, UPF)
Curs de Probabilitat, Professor Albert Satorra
Nov, 2014

El resultat que volem provar és el següent:

$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Calculem primer la integral indefinida

$$\int x e^{-\lambda x} dx$$

Ho fem per integració per parts. Definim: $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$; de manera que $du = dx$, $v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$. Tenim que la indefinida és

$$\int x e^{-\lambda x} dx = uv - \int v du = -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} + \int \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + C$$

on C és una constant qualsevol.

Poseu

$$G(x) = -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}$$

i noteu que $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$. Aleshores, la integral buscada serà

$$\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \lim_{a \to +\infty} [G(a) - G(0)]$$

$$= \lambda \lim_{a \to +\infty} (-\frac{1}{\lambda} a e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda a}) + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \lambda(-\frac{1}{\lambda} \lim_{a \to +\infty} (a/e^{\lambda a}) - \frac{1}{\lambda^2} \lim_{a \to +\infty} 1/e^{\lambda a}) + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

ja que

$$\lim_{a \to +\infty} (a/e^{\lambda a}) = 0$$

i

$$\lim_{a \to +\infty} 1/e^{\lambda a} = 0$$

donat que $\lambda > 0$

Hem demostrat doncs que en el cas que X sigui una v.a. exponencial de paràmetre λ, el seu valor esperat és

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$